Dr. Emanuel Scheidegger
Dipl. Math. Julia Eich

Modulformen I
WS 09/10

Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 13

Modulformen für $\Gamma_0(N)$

49. Erzeuger von $M_2(\Gamma_0(4))$.
Es sei $F(2)$ der Fundamentalbereich von $\Gamma(2)$ aus der Vorlesung. Dann ist $F_0(4) = \alpha F(2)$, mit $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ein Fundamentalbereich für $\Gamma_0(4) = \alpha\Gamma(2)\alpha^{-1}$ (siehe Aufgabe 15). Der Rand von $F_0(4)$ besteht aus: 2 vertikalen Geraden von $(-3 + i\sqrt{3})/4$ bzw. $(1 + i\sqrt{3})/4$ nach ∞; 2 Kreisbögen vom Radius $1/2$ und Zentrum $-1/2$ bzw. 0; ein Kreisbogen vom Radius $1/6$ und Zentrum $1/6$, der sich von 0 nach $(9 + i\sqrt{3})/28$ erstreckt; und ein Kreisbogen vom Radius $1/10$ und Zentrum $4/10$, der sich von $(9 + i\sqrt{3})/28$ nach $1/2$ erstreckt.

   (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle elliptischen Punkte in $F_0(4)$, d.h. Punkte, die Γ_1-äquivalent zu i oder ω sind. Welche Punkte liegen am Rand und welche im Inneren?

   (b) (1 Punkt) Es sei $f(\tau) \not\equiv 0$ eine meromorphe Modulform vom Gewicht k, $k \in 2\mathbb{Z}$ für $\Gamma_0(4)$. Sei $\nu_\tau(f)$ die Nullstellen- oder Polstellenordnung von f im Punkt τ. An einer Spitze $\kappa = \alpha^{-1} \cdot \infty$ definieren wir $\nu_\kappa(f)$ als die erste Potenz von q_h mit nicht-verschwindendem Koeffizienten in der Fourier-Entwicklung von $f|_k(\alpha^{-1})$ (wobei h der Verzweigungsindex aus Aufgabe 22 ist). Zeigen Sie, dass $\sum_{\tau \in \overline{F}_0(4)} \nu_\tau(f) = \frac{k}{2}$, wobei in der Summe nur ein Punkt in einer Menge von $\Gamma_0(4)$–äquivalenten Randpunkte berücksichtigt wird.

   (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Nullstellen von F_2 aus Aufgabe 47 und G_2 aus Aufgabe 48.

   (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass F_2 und G_2 $M_2(\Gamma_0(4))$ erzeugen.

50. Dimensionsformeln für $M_*(\Gamma_0(4))$.

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $M_k(\Gamma_0(4)) = \{0\}$, falls $k < 0$ und $M_0(\Gamma_0(4)) = \mathbb{C}$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $k = 2k_0 \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ jedes $f \in M_k(\Gamma_0(4))$ als homogenes Polynom vom Grad k_0 in F_2 und G_2 geschrieben werden kann.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $G_2^2 F_2 - 16 G_2 F_2^2$ $S_6(\Gamma_0(4))$ erzeugt. Benutzen Sie Aufgabe 37 und Proposition 4.14 um zu zeigen, dass $\eta(2\tau)^{12} = G_2^2 F_2 - 16 G_2 F_2^2$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $k = 2k_0 \geq 6$ jedes $f \in S_k(\Gamma_0(4))$ als homogenes Polynom vom Grad k_0 in F_2 und G_2, dass durch $G_2 F_2 (G_2 - 16 F_2)$ teilbar ist, geschrieben werden kann.

51. Modulformen mit Charakter.
(4 Punkte) Zeigen Sie, dass $(\eta(\tau)\eta(3\tau))^6 \in S_6(\Gamma_0(3))$ und dass $(\eta(\tau)\eta(7\tau))^3 \in S_3(7, \chi)$, wobei $\chi(n) = \left(\frac{n}{7}\right)$.

52. Die Schranke von Sturm
(4 Punkte) Es sei $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzgruppe vom Index N und $f \in M_k(\Gamma)$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$, falls $\nu_\infty(f) > N \frac{k}{12}$.

Abgabetermin: Freitag, 29.1.2010 um 10:00 Uhr.